数理解析研究所講究録
768巻 1991年 88-92

Gauss - Schwarz 理論
― 不変式，Moduli と超幾何函数 ―

九州大学理学部 吉田正章
(Masaaki YOSHIDA)

保型函数の逆関数は二階線型常微分方程式の解の比である；もしこの方程式がきちんと分ればこの方程式及びその解はよい性質を持つ．これは私の信念みたいな物だから話半分に聴いてもらってもよいが，例を挙げよう．保型函数はModular函数とも呼ばれ，その名の通り何らかのModuliを記述していることが期待されるので我々の例も或る代数多様体の族を与えることから始める．

<u>典型的例</u>（Gauss） 楕円曲線の族：

$$v^2 = u(u-1)(u-x) \qquad x:媒介変数$$

の周期空間は $H/\Gamma(2)$ である；ここで H は上半空間で $\Gamma(2)$ はそれに働く二階級主合同部分群である．媒介変数空間 X と周期空間の同値性 $H/\Gamma(2) \xrightarrow{\sim} X$ は Lambda 函数の名を持つ保型函数で与えらる；逆関数は超幾何微分方程式 $E(1/2, 1/2, 1)$ の解の比である．

も少し一般的例（Schwarz）曲線（超幾何曲線と言う人あり）族：

$$v^d = u^{n_1}(u-1)^{n_2}(u-x)^{n_3} \qquad x：媒介変数$$

$d, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$，$(d, n_1, n_2, n_3) = 1$

の周期空間は D/Γ である；ここで D は $\mathbb{P}^1$ か $\mathbb{C}$ か H で，Γ はそれ上に働くSchwarzの三角群である；三つの角度は $d, n_1, \cdots, n_3$ で決まる．媒介変数の空間と周期空間の同値性は超幾何微分方程式 $E(\alpha, \beta, \gamma)$：

$$x(1-x)z'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}z' - \alpha\beta z = 0$$

で与えられる；α, β, γ は $d, n_1, \cdots, n_3$ の簡単な式．

超幾何微分方程式は線型常微分方程式の中で比類無き重要な位置を占めて居て正に無双と言うに相応しい；依って私の信念も徒に根拠無き物で無い事が諒解されたと思う．さてこれに従って，多変数でよい微分方程式や函数を見付けよう。

最初の例（Picard）曲線（Picard曲線と言う人あり）族：

$$v^3 = u(u-1)(u-x_1)(u-x_2) \qquad (x_1, x_2)：媒介変数$$

の周期空間は B_2/Γ である；ここで B_2 は複素二次元球体で Γ はそれに働く離散群で $SU(2,1;\mathbb{Z}[1^{1/3}])$ に同種なものである．媒介変数空間と周期空間の同値性は，Appellの超幾何微分方程式系 $E_1(1/3, 1/3, 1/3; 2/3)$ の三つの解の比で与えられる．

も少し一般的例（寺田，Mostow，Deligne）　曲線族

$$v^d = u^{m_1}(u-1)^{m_2}(u-x_1)^{m_3}\cdots(u-x_n)^{m_{n+2}} \qquad x：媒介変数$$

（$2 \leqq n \leqq 5$，$d, m_1, \cdots, m_{n+2} \in \mathbb{N}$ うまく選ぶ；有限通り）

の周期空間は B_n/Γ である；B_n は n 次元球体，Γ はそれに働く離散群である．媒介変数空間と周期空間の同値性は，Appell‐Lauricella の超幾何微分方程式系 $E_D(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n, \gamma)$ の $n+1$ 個の解の比で与えられる；ここで $\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n, \gamma$ は $d, m_1, \cdots, m_{n+2}$ の簡単な式．

これらの例は汲めども尽きぬ旨味があり引続き，上記三名の他　志賀，松本，Holzapfel，Hunt 等により研究されている．先に進む前に媒介変数空間について注意を喚起する：一変数のとき簡単過ぎて見逃しがちだが，その空間は実は $\mathbb{P}^1$ 上の $n+3$ 点の配置空間である；不変式論的研究は，井草（$n=3$），塩田（$n=5$）．配置空間の基本群は色付組紐群であり上記微分方程式系はその表現を与える；近年はこの方面の研究が盛んである．

上の例では周期空間は常に球体の商であった（$H \simeq B_1$）．その他の対称空間が登場することは無いのであろうか．もしあるとすると如何なる類の微分方程式系が媒介変数空間と周期空間の同値性を与えるのであろうか．顧みるに，球体 B_n は $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n - \{0\}/\mathbb{C}^\times$ に同変埋込みされていて，なればこそ

微分方程式の階数（＝正則点での局所解空間の次元）が $n+1$ であったのだ．従って対称空間 D を相手にするにはその（次元最小の）同変射影埋込み $D^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$ に対応する階数 r の微分方程式を媒介変数空間上に考えなくてはいけない．我々は媒介変数空間の構造とか，D 上に働く離散群の性質等を云々する前に以下の純粋に局所微分幾何的問題に直面する：

射影部分多様体の局所同値問題：　$\mathbb{P}^{r-1}$ の n 次元部分多様体の切端が射影変換で D^n の一部に重なる為の微分幾何的条件を求めよ．

この有名な問題は一般には我々の使用に耐える正確さで解けていないが，$r=n+2$ で，D が 2 次超曲面のときは佐々木により完全に解かれている．これを利用して我々は数個の例を得た．その中の

典型的例（松本－佐々木－吉田）曲面（K3 曲面という人あり）の族：

$$w^2 = uv(u+v+1)(x_1u+x_2v+1)(x_3u+x_4v+1)$$

$x=(x_1,\cdots,x_4)$：媒介変数

の周期空間は $D/\Gamma_A(2)$ である；D は $\mathbb{P}^5$ 内の二次超曲面の領域（所謂 IV 型典型領域），$\Gamma_A(2)$ は $A=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}^{\oplus 2}\oplus(-I_2)$ に属する二階級主合同部分群である．媒介変数空間と周期空間の同値性は，（3, 6）型超幾何微分方程式 $E(3,6;\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$

の六個の解の比で与えられる.

ここで再び超幾何微分方程式なる物が出て来たが, その定義ははっきりしないというか有過ぎるというか困った物だが上のものは誰がみても超幾何と呼ぶに相応しい風格を備えている. 上の例における媒介変数空間は, $\mathbb{P}^2$ 上の 6点の配置空間であり, 不変式論的に完全に解っている. この基本群は組紐群と似ているがそれ程簡単でなく, 今後の研究を待たなければならない. さてここまで読んで来られた読者は, Schwarz が Gauß の後をやった如く, 寺田-Mostow-Deligne が Picard の後をやった如く, 誰でも「も少し一般的例」に関心をお持ちだろうと思う。 近い将来に結果の報告が出来ればと思っております。

参考文献

松本-佐々木-吉田: The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type (3, 6),
及びこれの文献表.

終